Özel değişken değiştirme

İntegrant içinde

$\sqrt{x^2-a^2}$ var ise $x=a\sec u$

$\sqrt{a^2-x^2}$ " " $x=a\cos u$ veya $x=a\sin u$

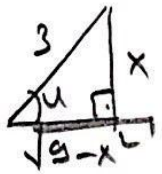
$\sqrt{a^2+x^2}$ " " $x=a\tan u$ değişken değişimi

yapılır.

Örnek: $I=\int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=?$

$x=3\sin u \Rightarrow dx=3\cos u\,du$ ve $u=\arcsin\frac{x}{3}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{3\sin u+8}{\sqrt{9-9\sin^2 u}}\,3\cos u\,du=\int\frac{3\sin u+8}{\cancel{3}\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 u}}_{\cancel{\cos u}}}\,\cancel{3}\cancel{\cos u}\,du$$



$$=\int(3\sin u+8)\,du=-3\cos u+8u+c$$

$$=-\cancel{3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{\cancel{3}}+8\arcsin\frac{x}{3}+c$$

Örnek: $I = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx = ?$

$x = 3\sec u \Rightarrow dx = 3\sec u \tan u\,du$ ve $u = \operatorname{arcsec}\dfrac{x}{3}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\cancel{3\sec u}\tan u}{\cancel{3\sec u}\sqrt{9\sec^2 u - 9}}\,du = \int \frac{\cancel{\tan u}}{3\underbrace{\sqrt{\sec^2 u - 1}}_{\cancel{\tan u}}}\,du = \frac{1}{3}\int du$$

$$= \frac{u}{3} + c = \frac{\operatorname{arcsec}\frac{x}{3}}{3} + c.$$

Örnek: $I = \int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = ?$

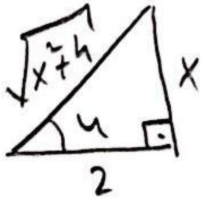
$x = 2\tan u \Rightarrow dx = 2\sec^2 u\,du$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\cancel{2}\sec^2 u\,du}{\cancel{4}_{2}\tan^2 u\sqrt{4\tan^2 u + 4}} = \int \frac{\sec^2 u\,du}{2\tan^2 u\sqrt{4\underbrace{(1+\tan^2 u)}_{\sec^2 u}}} = \int \frac{\sec^{\cancel{2}} u\,du}{4\tan^2 u\,\cancel{\sec u}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos u}\cdot\frac{\cos^{\cancel{2}} u}{\sin^2 u}\,du = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{4t} + c = -\frac{1}{4\sin u} + c$$

$\sin u = t$
$\cos u\,du = dt$

$$x = 2\tan u \Rightarrow \tan u = \frac{x}{2}$$



$$\sin u = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

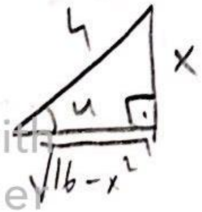
$$\Rightarrow I = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + c$$

Örnek: $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = ?$

$$x = 4\sin u \Rightarrow dx = 4\cos u\, du$$

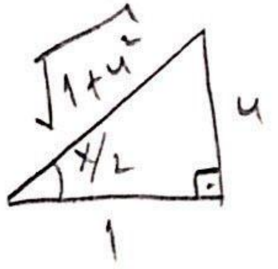
$$\Rightarrow I = \int \frac{\cancel{4}\cos u\, du}{\underset{4}{\cancel{16}}\sin^2 u\sqrt{16-16\sin^2 u}} = \int \frac{\cos u\, du}{4\sin^2 u\, 4\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 u}}_{\cos u}} = \frac{1}{16}\int \frac{du}{\sin^2 u}$$

$$= \frac{1}{16}\int \csc^2 u\, du = -\frac{\cot u}{16} + c = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + c$$



$\tan\frac{x}{2} = u$ değişken değişimi

$\sin x, \cos x, \ldots$ gibi trigonometrik fonksiyonların oluşturduğu bir polinomu rasyonel fonksiyona dönüştürmek için $\tan\frac{x}{2} = u$ değişken değişimi yapılır.



$$\sin\frac{x}{2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\Rightarrow \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\tan\frac{x}{2} = u \Rightarrow \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = du \Rightarrow \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = du$$

$$\Rightarrow dx = 2\cos^2\frac{x}{2}\,du \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

Örnek: $I = \int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}\,dx = ?$

$\tan\frac{x}{2} = u$ değişken değişimi yapılırsa

$$I = \int \frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{\left(1+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{\cancel{2}u}{\cancel{1+u^2}}}\,\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+u^2}}\,du = \int \frac{u^2+2u+1}{2u}\,du$$

$$= \int\left(\frac{u}{2}+1+\frac{1}{2u}\right)du = \frac{u^2}{4}+u+\frac{1}{2}\ln|u|+c$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

Örnek: $I = \int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx = ?$

$\tan\frac{x}{2} = u \Rightarrow \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1-\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{\cancel{2}u^2}{\cancel{2}}\,\frac{2}{1+u^2}\,du = 2\int \frac{u^2}{1+u^2}\,du$$

$$\begin{array}{r|l} u^2 & u^2+1 \\ \hline \underline{-u^2+1} & 1 \\ -1 & \end{array} \Rightarrow \frac{u^2}{u^2+1} = 1 - \frac{1}{u^2+1}$$

$$= 2\int \left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)du$$

$$= 2u - 2\arctan u + c$$

$$= 2\tan\frac{x}{2} - x + c$$

$\sqrt[n_i]{ax+b}$ biçiminde ifadeler içeren fonksiyonların integrali

Bu tür ifadeler içeren fonksiyonların integralleri hesaplanırken n_i kök kuvvetlerinin en küçük ortak katı p olmak üzere $ax+b=u^p$ değişken değişimi yapılır.

Örnek: $I=\int \frac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt[6]{x+1}}\,dx=?$

$\text{ekok}(4,6)=12 \Rightarrow x+1=u^{12} \Rightarrow dx=12u^{11}du$

$$\Rightarrow I=\int \frac{\sqrt[4]{u^{12}}+2}{\sqrt[6]{u^{12}}}12u^{11}du=\int \frac{(u^3+2)12u^{11}}{u^2}du$$

$$=12\int (u^{12}+2u^9)\,du=\frac{12}{13}u^{13}+\frac{24}{10}u^{10}+c$$

$$=\frac{12}{13}(x+1)^{13/12}+\frac{12}{5}(x+1)^{5/6}+c$$